15/10/2020

Εκτός από εξισώσεις με μερικές παραγώγους όπου η άγνωστη συνάρτηση είναι πραγματική. π.χ $u(x,t) \in \mathbb{R}$ $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ υπάρχουν και συστήματα ΜΔΕ, π.χ. οι εξισώσεις Navier-Stokes (= το σύστημα των εξισώσεων NS) στον $\mathbb{R}^3$ (δηλ. $U = \mathbb{R}^3$) και άγνωστη συνάρτηση $u: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ η ταχύτητα του ρευστού θα πρέπει να ικανοποιεί

$$\underbrace{u_t(x,t)}_{\in \mathbb{R}^3} + (u(x,t)\cdot \underbrace{\nabla}_{=(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)})u - \nu \Delta u(x,t) = -\nabla p(x,t)$$

μαζί με μια άγνωστη πραγματική συνάρτηση $p: \mathbb{R}^3 \times [0,t] \to \mathbb{R}$

$$u_t = \begin{pmatrix} u^1_t \\ u^2_t \\ u^3_t \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \nabla \cdot u(x,t) = 0$$

$$= \nabla x = \partial x_1 u^1 + \partial x_2 u^2 + \partial x_3 u^3$$

$$\Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u^1 \\ \Delta u^2 \\ \Delta u^3 \end{pmatrix} \qquad \nabla p = \begin{pmatrix} \partial x_1 p \\ \partial x_2 p \\ \partial x_3 p \end{pmatrix}$$

με $\Delta = \Delta x$

όπου $\nu > 0$ σταθερά ιξώδους και την αρχική συνθήκη $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$

Ανάλογα, μπορεί να έχουμε την N.S στο $U \subset \mathbb{R}^3$ οπότε απαιτείται και συνοριακές συνθήκες

Γενικά, αυτό που μας ενδιαφέρει σε ένα πρόβλημα ΜΔΕ είναι να είναι καλά-τεθειμένο (well-posed), δηλαδή

(1) να έχει λύση (ύπαρξη)

(2) να είναι μοναδική (μοναδικότητα)

(3) αυτή να εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα (εξωτερικές, συντελεστές του προβλήματος, αρχικά και/ή συνοριακά δεδομένα)

<u>Σχόλιο</u>: Όταν έχουμε μη γραμμικά προβλήματα με λύση που εξαρτάται από τον χρόνο, δεν είναι απαραίτητο αυτή η λύση να υπάρχει για όλους τους χρόνους $t \geq 0$. Αναλογία με ΣΔΕ:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

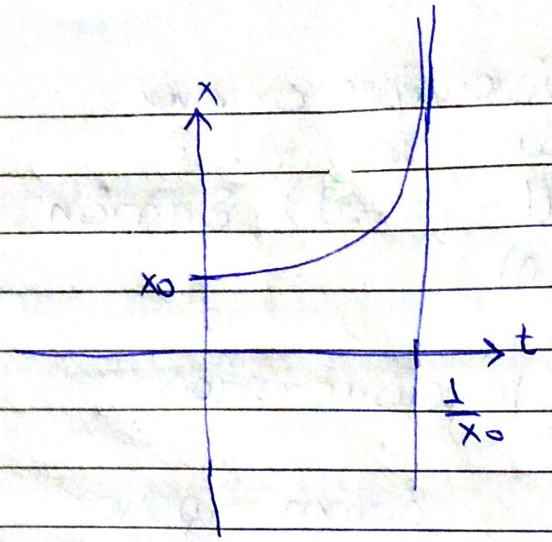
$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)}\, ds = \int_0^t 1\, ds = t \iff$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x^2} = t \iff \left[-\frac{1}{x}\right]_{x(0)}^{x(t)} = t \iff$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t \iff \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} - t \iff$$

$$x(t) = \frac{1}{-t + \frac{1}{x_0}}$$

Άρα, η λύση του ΠΑΤ είναι η $x(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$ η οποία εκρήγνυται για $t \to \frac{1}{x_0}$



Εδώ έχουμε μια λύση τοπικά στον χρόνο και όχι ολικά δηλ. $\forall t \geq 0$
$((\Rightarrow)$ στο $[0, +\infty))$

Το «αρχικό» κομμάτι της Navier-Stokes/Euler είναι ανάλογη της εξίσωσης Burgers:

$$u(x,t) + (u(x,t) \cdot \nabla) \cdot u(x,t) = 0$$

(για διανυσματικό $u \in \mathbb{R}^3$) που είναι οιονεί γραμμική (quasilinear).

Δες αμέσως εξίσωση μεταφοράς:

$u(x,t) + b \cdot \nabla u(x,t)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$

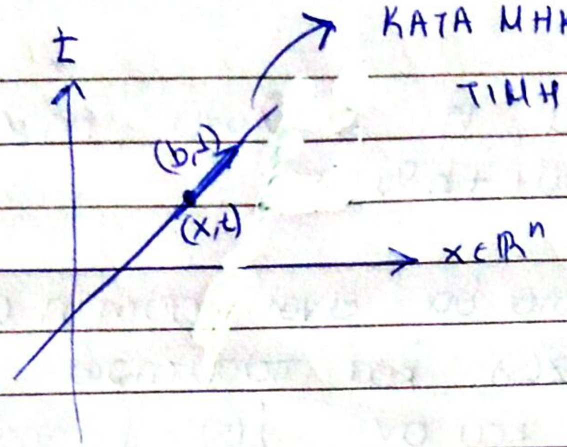
ΠΡΟΣΟΧΗ : $u : U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$

- -

Εξίσωση Μεταφοράς

Έστω $b \in \mathbb{R}^n$ σταθερό. Βρείτε το $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} u_t + b \underbrace{\nabla u}_{= \nabla_x = (\partial x_1, \dots, \partial x_n)} = 0 & \text{στο } \mathbb{R}^n \\ u(\cdot, 0) = g \end{cases}$$

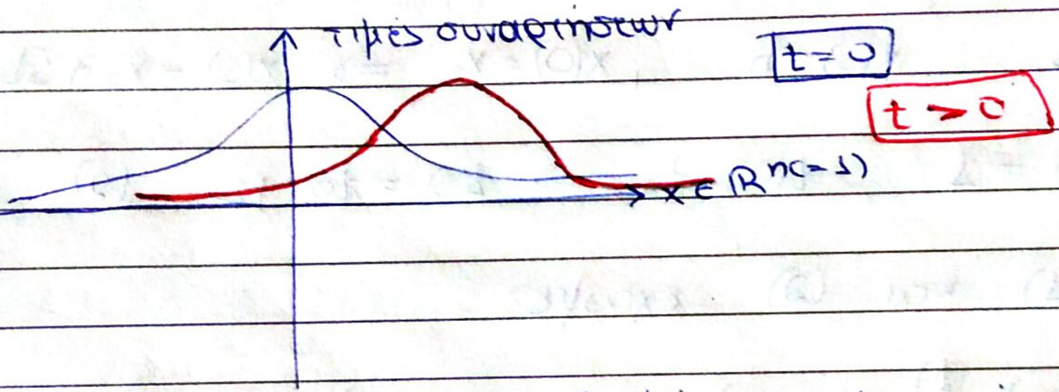


ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΑΥΤΗΣ Η ΤΙΜΗ ΤΟΥ u είναι ΣΤΑΘΕΡΗ!!!

$$u_t(x,t) + b\cdot\nabla u(x,t) = (\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n},\partial_t)u\cdot(b,1)$$

« $= \dfrac{\partial}{\partial(b,1)}u$ » — η παράγωγος στην κατεύθυνση $(b,1)$

(έστω ότι $|(b,1)|=1$)



Τα αρχικά δεδομένα μεταφέρονται στον χώρο απαράλλαχτα (σταθερά) με ταχύτητα b κατά μήκος των ευθειών $x - tb = x_0$

→ εξίσωση μεταφοράς (δεδομένων, πληροφορίας γνωστής στο $t=0$) στον χώρο.

Λύση του Π.Α.Τ. (μέθοδος χαρακτηριστικών) για την εξίσωση μεταφοράς, βασιζόμενοι στην προηγούμενη κεντρική παρατήρηση. (και τον κανόνα της αλυσίδας).

Έστω $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ σταθερό.

Έστω $\gamma(s) := (x(s), t(s)) \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, $s\in(-a,a)$, $a>0$

με $\gamma(0) = (x(0), t(0)) = (x,t)$ και

$$z(s) := u(\gamma(s)) \;[\Rightarrow z(0) = u(x,t)]$$

Τότε $\dot z(s) = \nabla u(\gamma(s))\cdot\underbrace{\dot x(s)}_{=b} + u_t(\gamma(s))\cdot\underbrace{\dot t(s)}_{=1} = 0$

Ερμηνεία: Έστω ότι η u λύνει την εξ. μεταφοράς $u_t + b\nabla u = 0$.

Θέλω να βρω ποια θα είναι αυτή η u. Εισάγω τις $\gamma(s)$, $z(s)$ και παρατηρώ ότι αν $\dot{x}(s) = b$ και αν $\dot{t}(s) = 1$, τότε

[αν η u λύνει την εξ. μεταφ.] θα έχω $\dot{z}(s) = 0 \Rightarrow z(s) = z(0) = u(x_0, t_0)$, $\forall s$ (1)

Επίσης, $\dot{x}(s) = b$, $x(0) = x_0 \Rightarrow x(s) = x_0 + sb$.

$\dot{t}(s) = 1$, $t(0) = t_0 \Rightarrow t(s) = t_0 + s$ (2)

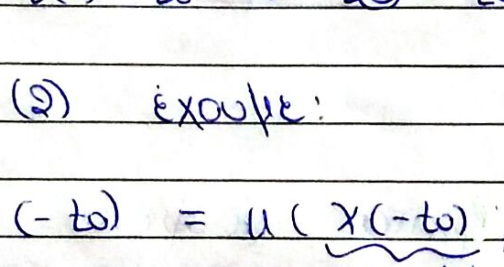
Από (1) και (2) έχουμε:

$$u(x_0, t_0) \overset{(1)}{=} z(-t_0) = u(\underbrace{x(-t_0)}_{= x_0 - t_0 b}, \underbrace{t(-t_0)}_{=0})$$

$$= u(x_0 - t_0 b, 0) = g(x_0 - t_0 b)$$

Αυτό ισχύει για κάθε (κατ' αρχάς σταθερό) $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \Rightarrow$ η λύση της εξ. μετ. (ΠΑΤ) είναι η $\boxed{u(x,t) = g(x - tb), \ x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0}$

Γεωμετρικά:



$\gamma(s) = (x(s), t(s))$

$= (x_0 + sb, t_0 + s)$ (εδώ)

$\Rightarrow \gamma(-t_0) = x_0 - t_0 b$

Η ταχύτητα μεταφοράς είναι b, αφού τα δεδομένα που βρίσκονται την χρ. στιγμή $t=0$ στο σημείο του χώρου $x_0 - t_0 b$ μεταφέρονται (αυτούσια) στο σημείο x_0 σε χρόνο t_0 [$\frac{x_0 - (x - t_0 b)}{t_0} = b$]

Επαλήθευση του ότι η $u(x,t) = g(x-tb)$ επιλύει το ΠΑΤ της εξ. μετ.

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot, 0) = g \end{cases}$$

Κλασική λύση $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$

$u(x,0) = g(x - 0b) = g(x)$, αρχική συνθήκη.

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left[g(x-tb)\right] = \nabla g(x-tb) \cdot (-b)$$

$$\nabla u = \nabla\left[g(x-tb)\right] = (\nabla g)(x-tb)$$

$\Longrightarrow u_t + b \cdot \nabla u = \nabla g \cdot (-b) + b \cdot \nabla g = 0$ εξίσωση